Corrigé de l'épreuve de mathématiques I

PREMIER PROBLÈME

Première partie

1. (a) La fonction polynômiale P_n étant le produit de deux fonctions polynômiales de degré n, elle est donc de degré $2n$.

   (b) Le polynôme P_n étant de degré $2n$, toutes ces dérivées d'ordre supérieure à $2n+1$ sont nulles, c'est à dire, pour tout $k \geq 2n+1$, $P_n^{(k)} = 0$.

2. (a) Le polynôme P_n admet exactement deux racines qui sont 0 et a/b, chacune d'elles étant de multiplicité n.

   (b) Par définition de l'ordre de multiplicité d'une racine on obtient

$$\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}(a/b) = 0.$$

3. (a) Pour tout $k \in \{n, n+1, \dots, 2n\}$, la formule de Leibniz permet d'écrire

$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{k} C_k^p (x^n)^{(p)}((a-bx)^n)^{(k-p)}.$$

Les dérivées d'ordre supérieur à $n+1$ aussi bien de $x \longmapsto x^n$ que de $x \longmapsto (a-bx)^n$ sont toutes nulles, on ne garde dans la somme ci-dessus que les indices p telles que $k-n \leq p \leq n$, ce qui donne

$$\begin{aligned} P_n^{(k)} &= \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^{n} C_k^p (x^n)^{(p)}((a-bx)^n)^{(k-p)} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p} \frac{n!}{(n-k+p)!} (-b)^{k-p} (a-bx)^{n-k+p} \\ &= \sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!\,(n-k+p)!} (-b)^{k-p} x^{n-p} (a-bx)^{n-k+p}. \end{aligned}$$

   (b) D'après 3.(a), on a :

$$P_n^{(k)}(0) = C_k^n \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^{k-n} a^{2n-k} \quad \text{et} \quad P_n^{(k)}(\frac{a}{b}) = C_k^{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!} (-b)^n (\frac{a}{b})^{2n-k} = (-1)^k P_n^{(k)}(0).$$

   (c) Si a et b sont des entiers, alors $C_k^n(-b)^{k-n}a^{2n-k}$ aussi. Par ailleurs, puisque $n \leq k \leq 2n$ alors $2n-k \leq n$ et par conséquent $\dfrac{n!}{(2n-k)!}$ est aussi entier ; on en déduit que $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ sont des entiers .

Deuxième partie

1. (a) La fonction P_n étant polynômiale, elle est continue, de classe C^1 sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$ et sa dérivée P_n' vérifie

$$\forall\, x \in [0, \frac{a}{b}], \quad P_n'(x) = \frac{1}{(n-1)!}(a-2bx)[x(a-bx)]^{n-1}.$$

Ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0		$a/2b$		a/b
$P_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$P_n(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{a^{2n}}{n!\,4^n b^n}$	$\searrow$	0

(b) D'après le tableau de variations de P_n on voit que

$$\forall\, x \in [0, \frac{a}{b}], \quad 0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_n(\frac{a}{2b})\ ;$$

en d'autres termes, la fonction P_n est positive sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$, bornée et admet un maximum au point $\frac{a}{2b}$ où elle prend la valeur

$$\beta_n = \sup_{0\leq x\leq \frac{a}{b}} P_n(x) = \frac{a^{2n}}{n!\, 4^n b^n}.$$

2. (a) Une simplification évidente donne $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\alpha}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

   (b) Par le critère de D'ALEMBERT, on déduit de la question 2.(a) que la série numérique $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et que par conséquent son terme général u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

   (c) Pour tout entier naturel n, $\beta_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}$ avec $\alpha = \dfrac{a^2}{4b} > 0$; donc d'après la question précédente, la suite $(\beta_n)_n$ converge vers 0.

3. Si $(x_n)_n$ est une suite d'entiers naturels qui converge vers 0, alors pour $\varepsilon = 1/2$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n| \leq 1/2$ dès que $n \geqslant n_0$. Les x_n étant des entiers, on obtient $x_n = 0$ pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Troisième partie

1. Pour tout $x \in [0, \pi]$, on a $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et d'après la première question de la partie précédente, on a aussi $0 \leqslant Q_n(x) \leqslant \dfrac{c^{2n}}{4^n d^n n!}$. on en déduit que

$$\forall x \in [0, \frac{c}{d}], \quad 0 \leqslant Q_n(x) \sin x \leqslant \frac{c^{2n}}{4^n d^n n!}.$$

En intégrant entre 0 et π on obtient

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi c^{2n}}{4^n d^n n!}.$$

Enfin, la suite $\left(\dfrac{c^{2n}}{4^n d^n n!}\right)_n$ étant convergente vers 0, il en est donc de même de la suite $(I_n)_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto Q_n(x)\sin x$ est continue, positive et non identiquement nulle sur le segment $[0, \pi]$, son intégrale sur ce segment est donc strictement positive ; en particulier $I_n \neq 0$.

3. Par des intégrations par parties successives on obtient, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$ et tout couple (f, g) de fonctions de classe C^p sur un segment $[a, b]$,

$$\int_a^b f(x) g^{(p)}(x)\, dx = \Big[\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k f^{(k)}(x) g^{(p-1-k)}(x)\Big]_a^b + (-1)^p \int_a^b f^{(p)}(x) g(x)\, dx.$$

Cette formule appliquée sur le segment $[0, \frac{c}{d}]$ aux fonctions $x \longmapsto Q_n(x)$ et $x \longmapsto (-1)^{n+1}\cos x$, pour $p = 2n+1$ et compte tenu du fait que $Q_n^{(2n+1)} = 0$ et que $\cos^{(k)}(x) = \cos(x + \frac{k\pi}{2})$ donne

$$\int_0^{\frac{c}{d}} Q_n(x) \sin(x)(x) dx = \Big[\sum_{k=0}^{2n} Q_n^{(k)}(x) \cos(x + \frac{k\pi}{2} + \pi)\Big]_0^{\frac{c}{d}}$$

Enfin, d'après la question 2.(b) de la première partie, si $0 \leq k \leq n-1$, la dérivée k-ième de Q_n s'annule en 0 et en $\pi = \frac{c}{d}$, ce qui permet de restreindre la somme trouvée ci-dessus aux indices k compris entre n et $2n$. On obtient alors

$$\int_0^{\frac{c}{d}} Q_n(x) \sin(x)(x) dx = \sum_{k=n}^{2n} \Big(Q_n^{(k)}(\frac{c}{b}) \cos(\frac{c}{b} + \frac{k\pi}{2} + \pi) - Q_n^{(k)}(0) \cos(\frac{k\pi}{2} + \pi)\Big).$$

4. Soit $n \in N^*$. D'après la question 3.(c) de la première partie, pour tout $n \leqslant k \leqslant 2n$, c et d étant entiers, $Q_n^{(k)}(\frac{c}{d})$ et $Q_n^{(k)}(0)$ le sont aussi. D'autre part $\cos(\dfrac{c}{d} + k\dfrac{\pi}{2} + \pi) = \cos(k\dfrac{\pi}{2}) \in \{0, 1, -1\}$, et $\cos(k\dfrac{\pi}{2} + \pi) \in \{0, 1, -1\}$, par suite I_n qui est la somme d'entiers est lui même un entier.

5. Supposons que $\pi = \frac{c}{d} \in Q$ avec $c, d \in \mathbb{N}^*$; alors d'après les questions 1. et 4. précédentes, $(I_n)_n$ est une suite d'entiers qui converge vers 0 et d'après la question 3. de la deuxième partie, les I_n sont nuls à partir d'un certain rang, chose qui contredit le résultat de la question 2. précédente. On en déduit que π n'est pas rationnel.

DEUXIÈME PROBLÈME

Première partie

1. (a) Le domaine de définition de la fonction ρ est égal à $\mathbb{R}$ et cette fonction est $2\pi-$périodique.
   (b) La fonction ρ est paire comme la fonction cosinus ; on en déduit que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le point $\varphi(-\theta)$ du support de l'arc γ_1 se déduit du point $\varphi(\theta)$ par symétrie par rapport à l'axe polaire $O + \mathbb{R}\vec{i}$. Ainsi, la droite affine $O + \mathbb{R}\vec{i}$ est un axe de symétrie du support de l'arc γ_1.
   (c) Puisque la fonction ρ est $2\pi-$périodique, le support de l'arc γ_1 est complètement décrit lorsque θ décrit l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Ainsi, grâce à la parité de la fonction ρ, le support de l'arc γ_1 peut être obtenu à partir de celui de l'arc γ_2 par symétrie par rapport à l'axe polaire.

2. On a $\rho(\pi) = 0$ donc $\varphi(\pi) = O$, puis $\rho'(\pi) = -\sin\pi = 0$ et $\rho''(\pi) = -\cos\pi = 1 \neq 0$; on en déduit que le point $O = \varphi(\pi)$ du support de l'arc γ_1 est un point de rebroussement de première espèce.

3. Pour tout réel θ, on a
$$\varphi'(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho(\theta)\vec{v}(\theta) \quad \text{et} \quad \varphi''(\theta) = \big(\rho''(\theta) - \rho(\theta)\big)\vec{u}(\theta) + 2\rho'^2(\theta)\vec{v}(\theta).$$
Le déterminant des vecteurs $\varphi'(\theta)$ et $\varphi''(\theta)$ dans une base orthonormée de $\vec{E}$ vaut alors
$$\det\big(\varphi'(\theta), \varphi''(\theta)\big) = 2\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta) = 3(1 + \cos\theta).$$
On en déduit qu'en tout point $\varphi(\theta)$ de l'arc γ_1 distinct du pôle, c'est à dire que $(1 + \cos\theta) \neq 0$, ce déterminant est strictement positif puisque $1 + \cos\theta > 0$; ainsi, ces point sont biréguliers et la concavité de la courbe est tournée vers le pôle O.

4. La fonction ρ est de classes C^∞ et décroissante sur le segment $[0, \pi]$ puisque
$$\forall\, \theta \in [0, \pi], \quad \rho'(\theta) = -\sin\theta \leqslant 0.$$
on en déduit le tableau de variations suivant

x	0		π
$\rho'(x)$	0	-	0
$\rho(x)$	2	$\searrow$	0

5. Voir figure 1 du document annexe joint à ce corrigé.

6. À l'aide de la définition, on obtient l'expression de la longueur de l'arc γ_2, notée $\ell(\gamma_2)$, et donnée par
$$\ell(\gamma_2) = \int_0^\pi ||\varphi'(\theta)||\, d\theta = \int_0^\pi \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\, d\theta = 2\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4.$$

7. La portion du plan délimitée par le support de l'arc γ_1 est définie par
$$\{O + r\vec{u}(\theta)\ ;\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\}\ ;$$
elle a la même aire que l'ensemble $\mathcal{D} = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2\ ;\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r \leqslant \rho(\theta)\}$.
L'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ est donnée par $\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \displaystyle\iint_{\mathcal{D}} dx\, dy$; cette intégrale double se calcule facilement par passage en coordonnées polaire, on obtient alors
$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} dx\, dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\rho(\theta)} r\, dr\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \rho^2(\theta)\, d\theta = \int_0^\pi (1 + \cos\theta)^2\, d\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Deuxième partie

A- Question de cours

1. Voir figure 2 du document annexe joint à ce corrigé.

2. Par définition, l'abscisse curviligne s sur l'arc γ orienté dans le sens des θ croissants et correspondant au choix de θ_0 comme origine est la fonction définie par

$$s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{f^2(t) + f'^2(t)}\ dt.$$

   $s(\theta_1)$ représente la longueur de la portion de l'arc γ décrite lorsque θ varie de θ_0 à θ_1 si $\theta_1 \geqslant \theta_0$ et son opposé sinon.

   Il découle de cette définition que $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{f^2 + f'^2}$.

3. On sait que $\tan V = \dfrac{f}{f'}$ et par dérivation on obtient $\big(1 + \tan^2 V\big)\dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{f'^2 - ff''}{f'^2}$, d'où

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{f'^2 - ff''}{f^2 + f'^2}.$$

   Puis $R = \dfrac{ds}{d\alpha} = \dfrac{ds}{d\theta}\dfrac{d\theta}{d\alpha}$, et comme $\alpha = \theta + V$ alors $\dfrac{d\alpha}{d\theta} = 1 + \dfrac{dV}{d\theta} = \dfrac{f^2 + 2f'^2 - ff''}{f^2 + f'^2}$. On en déduit alors que

$$R = \frac{(f^2 + f'^2)^{3/2}}{f^2 + 2f'^2 - ff''}.$$

   Le fait que l'on puisse diviser par la quantité $f^2 + 2f'^2 - ff''$ est justifié par la birégularité de l'arc γ en question.

4. On sait que $I = M + R\vec{N}$, puis $\vec{N} = -R\sin V\vec{u} + R\cos V\vec{v}$; ainsi I a pour coordonnées $\big(-R\sin V, R\cos V\big)$ dans le repère $\big(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta)\big)$. Par ailleurs on a

$$\cos V = \frac{f'}{\sqrt{f^2 + f'^2}} \quad \text{et} \quad \sin V = \frac{f}{\sqrt{f^2 + f'^2}},$$

   donc le point I a pour coordonnées $\Big(-\dfrac{(f^2 + f'^2)f}{f^2 + 2f'^2 - ff''}, \dfrac{(f^2 + f'^2)f'}{f^2 + 2f'^2 - ff''}\Big)$ dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

B- Retour à l'arc γ_1

1. On viens de voir que les coordonnées de $I(\theta)$, centre de courbure en $M((\theta)) = \varphi(\theta)$, dans le repère $(M(\theta), \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$, sont

$$\Big(-\frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}, \frac{(\rho^2 + \rho'^2)\rho'}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}\Big) = \frac{2}{3}(-\rho, \rho')\ ;$$

   on en déduit que les coordonnées de $I(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ sont

$$\frac{1}{3}(\rho, 2\rho') = \frac{1}{3}(1 + \cos\theta, -2\sin\theta),$$

   c'est à dire que $\overrightarrow{OI(\theta)} = \frac{1}{3}(1 + \cos\theta).\vec{u}(\theta) - \frac{2}{3}\sin\theta.\vec{v}$.

   Alors que dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ses coordonnées sont $\Big(\dfrac{1}{3}(1 - \cos\theta)\cos\theta + \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}(1 - \cos\theta)\sin\theta\Big)$, c'est à dire que

$$\overrightarrow{OI(\theta)} = (\frac{1}{3}(1 - \cos\theta)\cos\theta + \frac{2}{3}).\vec{i} + \frac{1}{3}(1 - \cos\theta)\sin\theta.\vec{j}.$$

2. Soit Ω le point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{1}{2}\vec{i}$, alors

$$\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = \left(\frac{1}{3}(1-\cos\theta)\cos\theta + \frac{1}{6}\right).\vec{i} + \frac{1}{3}(1-\cos\theta)\sin\theta.\vec{j} = \frac{1}{3}(1-\cos\theta).\vec{u}(\theta) + \frac{1}{6}.\vec{i}.$$

Par ailleurs

$$\overrightarrow{OM(\theta+\pi)} = -(1-\cos\theta)\vec{u}(\theta)$$

donc

$$\overrightarrow{\Omega M(\theta+\pi)} = -(1-\cos\theta)\vec{u}(\theta) - \frac{1}{2}\vec{i},$$

et par suite $\overrightarrow{\Omega I(\theta)} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega M(\theta+\pi)}$, c'est à dire que le point $I(\theta)$ est bien l'image du point $M(\theta+\pi)$ par l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{3}$.

3. On a $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \mathrm{pr}\big(\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)}\big)$, où pr désigne la projection orthogonale de $\overrightarrow{E}$ sur la droite vectorielle $\mathbb{R}\vec{u}(\theta)$. Or, d'après ce qui précède, $\overrightarrow{M(\theta)I(\theta)} = \frac{2}{3}\big(\rho(\theta)\vec{u}(\theta) + \rho'(\theta)\vec{v}(\theta)\big)$ donc $\overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = -\frac{2}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta)$. On en déduit alors que

$$\overrightarrow{OH(\theta)} = \overrightarrow{OM(\theta)} + \overrightarrow{M(\theta)H(\theta)} = \frac{1}{3}\rho(\theta)\vec{u}(\theta) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM(\theta)}.$$

Ainsi, le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.

4. Voir figure 3 du document annexe joint à ce corrigé.

5. Il s'agit bien entendu de la longueur de la courbe décrite une seule fois, ce qui donne le tiers de celle de l'arc $\Big(]-\pi,\pi[,\varphi_{/]-\pi,\pi[}\Big)$; elle vaut donc $\frac{8}{3}$. L'aire de la portion du plan que cette courbe délimite vaut quant à elle $\frac{\pi}{6}$.

FIN DU CORRIGÉ